Twisted Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories (Algebraic number theory and related topics)

諏訪, 紀幸

数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 243-256

Twisted Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories

諏訪紀幸　(中央大学理工学部)

本論の目的の一つは，陸名 [5] によって見出された体の n 次巡回拡大に対する生成多項式や小松 [4] によって定式化された descent Kummer theory を group scheme の枠組みで捉え直すことにある．[4] に従うなら，標題は descent Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories とすべきであろうが，６０年代の雰囲気を思い起こして twisted を採用した．

第１節では Kummer 理論と Kummer-Artin-Schreier 理論について概観する．第２節では議論の展開に必要な group scheme の定義と基本的な性質を簡略に述べる．第３節では Kummer 理論を二次拡大でひねって得られる twisted Kummer theory について，第４節では Kummer-Artin-Schreier 理論を二次拡大でひねって得られる twisted Kummer-Artin-Schreier theory について説明する．ここで省いた証明や考察は [9] に詳しく論述した．

本論では陸名 [5] や小松 [4] の仕事を一般の環の上に拡張したが，group scheme を高次元にして得られる一般化も考えられる．これについては本講究録所収の木田雅成氏の論説を参照されたい．

記号.

M を可換群あるいは可換群の層，φ を M の自己準同型とする．$\mathrm{Ker}[\varphi : M \to M]$ を ${}_{\varphi}M$ で，$\mathrm{Coker}[\varphi : M \to M]$ を M/φ で表わす．

scheme の上の層はすべて fppf 位相で考える．したがって，層の cohomology はすべて fppf cohomology を意味する．$H^*(\mathrm{Spec}\, R, G)$ を $H^*(R, G)$ と略記する．

G が scheme X の上の smooth quasi-projective group scheme であるとき，G に係数を持つ X の上の fppf cohomology は étale cohomology と一致することが知られている (Grothendieck [3], III.11.7).

１．Kummer 理論と Kummer-Artin-Schreier 理論

1.1. (Kummer 理論) $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[U, 1/U]$ によって multiplicative group scheme を表わす．乗法は $U \mapsto U \otimes U$ で与えられる．

n を整数 ≥ 2 とし，$\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{Ker}[n : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m]$ と記す．ここで，$\zeta = e^{2\pi i/n}$ とすれば，$\boldsymbol{\mu}_n$ は $\mathbb{Z}[\zeta, 1/n]$ の上で constant group scheme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型．したがって，X が $\mathbb{Z}[\zeta, 1/n]$-scheme であるとき，group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{n} H^0(X, \mathbb{G}_m) \\ \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{n} H^1(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る．さらに，$H^1(X,\mathbb{G}_m)=\mathrm{Pic}(X)$ (Hilbert 90) に注意して完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O})^\times/n \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_n\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

を得る．特に，$X=\mathrm{Spec}\,K$ (K は体) であれば，$\mathrm{Pic}(X)=0$ なので，同型

$$K^\times/n \xrightarrow{\sim} H^1(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

を得る．言い換えれば，$t^n-u\in K[u][t]$ は K の n 次巡回拡大の生成多項式である．

1.2. (Artin-Schreier 理論) $\mathbb{G}_a=\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T]$ によって additive group scheme を表わす．加法は $T\mapsto T\otimes 1+1\otimes T$ で与えられる．

p を素数とし，$F:\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}\to\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}$ を Frobenius 写像とすれば，$\mathrm{Ker}[F-1:\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}\to\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}]$ は constant group scheme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型．したがって，X が $\mathbb{F}_p$-scheme であるとき，group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X,\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \xrightarrow{F-1} H^0(X,\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \\ \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^1(X,\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \xrightarrow{F-1} H^1(X,\mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る．ここで，$H^1(X,\mathbb{G}_a)=H^1(X,\mathcal{O})$ なので，完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O})/(F-1) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_{F-1}H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

を得る．特に，$X=\mathrm{Spec}\,K$ (K は体) であれば，$H^1(X,\mathcal{O})=0$ なので，同型

$$K/(F-1) \xrightarrow{\sim} H^1(K,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る．言い換えれば，$t^p-t-u\in K[u][t]$ は K の p 次巡回拡大の生成多項式である．

記号 1.3. A を環，$\lambda\in A$ とし，

$$\mathcal{G}^{(\lambda)}=\mathrm{Spec}\,A[T,\frac{1}{\lambda T+1}]$$

とおく．

$$T\mapsto T\otimes 1+1\otimes T+\lambda T\otimes T$$

によって乗法を定義すれば，$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は commutative group scheme となる．さらに，group scheme の準同型 $\alpha^{(\lambda)}:\mathcal{G}^{(\lambda)}\to\mathbb{G}_{m,A}$ を

$$U\mapsto \lambda T+1: A[U,\frac{1}{U}] \longrightarrow A[T,\frac{1}{\lambda T+1}]$$

で定義する．λ が A において可逆なら，$\alpha^{(\lambda)}$ は同型．一方，λ が A で可逆でないとき，$A_0 = A/(\lambda)$ とすれば，$\mathcal{G}^{(\lambda)} \otimes_A A_0$ は $\mathbb{G}_{a,A_0}$ に他ならない．

B を A 代数とする．B が局所環，または，λ が B において巾零なら，$H^1(B, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$ が成立する ([6], Cor.1.3, 1.4)．

1.4. (Kummer-Artin-Schreier 理論) p を素数とする．また，$\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\lambda = \zeta - 1$, $A = \mathbb{Z}[\zeta]$, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ とおく．このとき，

$$\frac{(\lambda T + 1)^p - 1}{\lambda^p} \in \mathbb{Z}[\zeta][T]$$

で

$$\frac{(\lambda T + 1)^p - 1}{\lambda^p} \equiv T^p - T \mod \lambda.$$

A の上の group scheme の準同型

$$\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)} = \operatorname{Spec} A[T, \frac{1}{\lambda T + 1}] \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)} = \operatorname{Spec} A[T, \frac{1}{\lambda^p T + 1}]$$

を

$$T \mapsto \frac{(\lambda T + 1)^p - 1}{\lambda^p}$$

によって定義する．このとき，$\operatorname{Ker}[\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)} \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)}]$ は constant group scheme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型．これから，$A = \mathbb{Z}[\zeta]$ の上の group scheme の完全列

$$(\#) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0$$

を得る．$(\#) \otimes_A K$ は Kummer sequence

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_{p,K} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K} \xrightarrow{p} \mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow 0$$

に同型．また，$\mathbb{F}_p = A/(\lambda)$ で $(\#) \otimes_A \mathbb{F}_p$ は Artin-Schreier sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \longrightarrow 0$$

に他ならない．

さらに，X が A-scheme であるとき，group scheme の完全列 $(\#)$ から完全列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\Psi} H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\Psi} H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る．特に，$X = \operatorname{Spec} B$ (B は局所 A 代数) であれば，$H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$ なので，同型

$$\operatorname{Coker}[\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)}(B) \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)}(B)] \xrightarrow{\sim} H^1(B, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る．言い換えれば，$\dfrac{(\lambda t+1)^p-1}{\lambda^p}-u\in B[u][t]$ は局所環 B の p 次不分岐巡回拡大の「生成多項式」である．

補註 1.5. 完全列 (#) は Waterhouse[10] と [7] によって独立に発見された。方程式

$$\frac{(\lambda t+1)^p-1}{\lambda^p}=a$$

は Furtwängler の仕事 [1][2] に遡る．

2．Group scheme $U_{B/A}$, $G_{B/A}$

2.1. A を環，$r,s\in A$ とし，$D=r^2-4s$, $B=A[t]/(t^2-rt+s)$ とおく．t の B における像を ε で表わす．このとき，$B=A[\varepsilon]$ で $\varepsilon^2-r\varepsilon+s=0$．また，

$$\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}=\operatorname{Spec}A[U,V,\frac{1}{U^2+rUV+sV^2}]$$

で乗法は

$$U\mapsto U\otimes U-sV\otimes V,\ V\mapsto U\otimes V+V\otimes U+rV\otimes V$$

で与えられる．$\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}$ は函手 $R\mapsto(R\otimes_A B)^\times$ を表現する．

また，自然な埋め込み $R^\times\to(R\otimes_A B)^\times$ は対応 $U\mapsto T$, $V\mapsto 0$ が定義する射

$$i:\mathbb{G}_{m,A}=\operatorname{Spec}A[T,\frac{1}{T}]\to\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}=\operatorname{Spec}A[U,V,\frac{1}{U^2+rUV+sV^2}]$$

によって表現される．一方，norm 写像 $\mathrm{Nr}:(R\otimes_A B)^\times\to R^\times$ は対応 $T\mapsto U^2+rUV+sV^2$ が定義する射

$$\mathrm{Nr}:\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}=\operatorname{Spec}A[U,V,\frac{1}{U^2+rUV+sV^2}]\to\mathbb{G}_{m,A}=\operatorname{Spec}A[T,\frac{1}{T}]$$

によって表現される．さらに，

(1) $i:\mathbb{G}_{m,A}\to\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}$ は closed immersion；

(2) $\mathrm{Nr}:\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}\to\mathbb{G}_{m,A}$ は faithfully flat；

(3) $\mathrm{Nr}\circ i:\mathbb{G}_{m,A}\to\mathbb{G}_{m,A}$ は二乗写像．

記号 2.2. A の上の group scheme $U_{B/A}$ を

$$U_{B/A}=\operatorname{Ker}[\mathrm{Nr}:\prod_{B/A}\mathbb{G}_{m,B}\to\mathbb{G}_{m,A}].$$

によって定義する．このとき，

$$U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1)$$

で乗法は

$$U \mapsto U \otimes U - sV \otimes V,\ V \mapsto U \otimes V + V \otimes U + rV \otimes V$$

で与えられる．

D が A において可逆なら $U_{B/A}$ は A の上の torus である．より一般に，D が A において巾零でなければ，$U_{B/A} \otimes_A A[1/D]$ は $A[1/D]$ の上の torus で，$B[1/D]$ の上で分解する．実際，対応 $T \mapsto U + \varepsilon V$ によって定義される準同型

$$\sigma : U_{B/A} \otimes_A B = \operatorname{Spec} B[U,V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1) \to \mathbb{G}_{m,B} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{T}]$$

は $B[1/D]$ の上で同型を誘導する．

記号 2.3. A の上の group scheme $G_{B/A}$ を

$$G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y)$$

(a) 乗法

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X - rX \otimes X - 2sX \otimes Y - 2sY \otimes X - rsY \otimes Y, \\ Y &\mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y + (r^2 - 2s)Y \otimes Y + rX \otimes Y + rY \otimes X + 2X \otimes X; \end{aligned}$$

(b) 単位元

$$X \mapsto 0,\ Y \mapsto 0;$$

(c) 逆元

$$X \mapsto -X - rY,\ Y \mapsto Y.$$

によって定義する．$G_{B/A}$ は A の上に smooth.

さらに，対応

$$X \mapsto \frac{UV}{U^2 + rUV + sV^2},\ Y \mapsto \frac{V^2}{U^2 + rUV + sV^2}$$

によって準同型

$$\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} = \operatorname{Spec} A[U, V, \frac{1}{U^2 + rUV + sV^2}] \to G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y)$$

を定義すれば，group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{i} \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \longrightarrow G_{B/A} \longrightarrow 0$$

を得る．

また，対応

$$U \mapsto 1 - rX - 2sY,\ V \mapsto 2X + rY$$

は準同型

$$\alpha : G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y) \to \\ U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1)$$

を定義する．D が A において可逆なら α は同型．より一般に，D が A において巾零でなければ，α は $A[1/D]$ の上で同型．実際，$\alpha \otimes_A A[1/D]$ の逆射は

$$X \mapsto \frac{r(1-U) - 2sV}{D},\ Y \mapsto \frac{rV - 2(1-U)}{D}$$

によって与えられる．

また，準同型

$$\beta : U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1) \to \\ G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y)$$

を合成

$$U_{B/A} \to \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \to G_{B/A}.$$

として定義すれば，$\alpha \circ \beta$ は $U_{B/A}$ の二乗写像で，$\beta \circ \alpha$ は $G_{B/A}$ の二乗写像．

$\lambda = 2\varepsilon - r \in B$ とおく．このとき，対応

$$T \mapsto X + \varepsilon Y,\ \frac{1}{1+\lambda T} \mapsto 1 - \lambda\{X + (r-\varepsilon)Y\}$$

は B の上で同型

$$\sigma : G_{B/A} = \operatorname{Spec} B[X,Y]/(X^2 + rXY + sV^2 - Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\lambda)} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{1+\lambda T}].$$

を定義する．

2.4. X を A-scheme とする．group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow U_{B/A} \longrightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \xrightarrow{\mathrm{Nr}} \mathbb{G}_{m,A} \longrightarrow 0$$

は完全列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Gamma(X, U_{B/A}) \longrightarrow \Gamma(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\mathrm{Nr}} \Gamma(X, \mathbb{G}_m) \\ &\longrightarrow H^1(X, U_{B/A}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X \otimes_A B) \xrightarrow{\mathrm{Nr}} \operatorname{Pic}(X) \\ &\longrightarrow H^2(X, U_{B/A}) \longrightarrow H^2(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\mathrm{Nr}} H^2(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を誘導する．一方，group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{i} \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \longrightarrow G_{B/A} \longrightarrow 0$$

は完全列

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{i} \Gamma(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \Gamma(X, G_{B/A}) \\ &\longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(X \otimes_A B) \longrightarrow H^1(X, G_{B/A}) \\ &\longrightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{i} H^2(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2(X, G_{B/A}) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

を誘導する．

特に，$X = \mathrm{Spec}\, R$ (R は A 代数) とすれば，完全列

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow U_{B/A}(R) \longrightarrow (R \otimes_A B)^\times \xrightarrow{\mathrm{Nr}} R^\times \\ &\longrightarrow H^1(R, U_{B/A}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R \otimes_A B) \xrightarrow{\mathrm{Nr}} \mathrm{Pic}(R) \\ &\longrightarrow H^2(R, U_{B/A}) \longrightarrow H^2(R \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\mathrm{Nr}} H^2(R, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow R^\times \xrightarrow{i} (R \otimes_A B)^\times \longrightarrow G_{B/A}(R) \\ &\longrightarrow \mathrm{Pic}(R) \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(R \otimes_A B) \longrightarrow H^1(R, G_{B/A}) \\ &\longrightarrow H^2(R, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{i} H^2(R \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2(R, G_{B/A}) \longrightarrow \cdots .\end{aligned}$$

を得る．さらに，R が局所環なら，$\mathrm{Pic}(R \otimes_A B) = 0$ なので，同型

$$\mathrm{Coker}[\mathrm{Nr} : (R \otimes_A B)^\times \to R^\times] \xrightarrow{\sim} H^1(R, U_{B/A}),$$

$$H^1(R, G_{B/A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[i : H^2(R, \mathbb{G}_m) \to H^2(R \otimes_A B, \mathbb{G}_m)]$$

を得る．ここで，合成

$$\mathrm{Nr} \circ i : \mathbb{G}_{m,A} \to \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \to \mathbb{G}_{m,A}$$

が二乗写像なので，$H^1(R, U_{B/A})$, $H^1(R, G_{B/A})$ は 2 によって消える．

補註 2.5. group scheme $G_{B/A}$ の記述は Waterhouse-Weisfeiler [11] による．

3．Twisted Kummer theory

3.1. n を整数 ≥ 3 とし，$\zeta = e^{2\pi i/n}$, $\omega = \zeta + \zeta^{-1}$，$A = \mathbb{Z}[\omega]$, $B = \mathbb{Z}[\zeta]$ とおく．このとき，B は $A[t]/(t^2 - \omega t + 1)$ に同型．したがって，

$$U_{B/A} = \mathrm{Spec}\, A[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1)$$

で乗法は

$$U \mapsto U \otimes U - V \otimes V,\ V \mapsto V \otimes U + U \otimes V + \omega V \otimes V$$

で与えられる．$U_{B/A} \otimes_A A[1/n]$ は $A[1/n] = \mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ の上の torus で，$\mathrm{Ker}[n : U_{B/A} \to U_{B/A}]$ は $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ の上で constant group scheme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型．

補註 3.1.1. n が奇数と仮定する．このとき，$D = \omega^2 - 4$, $A_0 = A/(D)$ とおけば，$U_{B/A} \otimes_A A_0$ は $\mathbb{G}_a \times \boldsymbol{\mu}_2$ に同型．したがって，$U_{B/A}$ は A の上に smooth．

実際，

$$U_{B/A} \otimes_A A_0 = \mathrm{Spec}\, A_0[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) = \mathrm{Spec}\, A_0[U, V]/\Big((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\Big)$$

で $U + \frac{\omega}{2}V$ は $A_0[U, V]/\Big((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\Big)$ の group-like element なので，対応 $T \mapsto U + \frac{\omega}{2}V$ は準同型

$$\pi : U_{B/A} \otimes_A A_0 = \mathrm{Spec}\, A_0[U, V]/\Big((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\Big) \to \mu_{2,A_0} = \mathrm{Spec}\, A_0[T]/(T^2 - 1)$$

を定義する．さらに，対応 $U \mapsto 1 - \frac{\omega}{2}S$, $V \mapsto S$ は準同型

$$\mathbb{G}_{a,A_0} = \mathrm{Spec}\, A_0[S] \to U_{B/A} \otimes_A A_0 = \mathrm{Spec}\, A_0[U, V]/\Big((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\Big)$$

を定義する．このとき，group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{a,A_0} \longrightarrow U_{B/A} \otimes_A A_0 \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{\mu}_{2,A_0} \longrightarrow 0$$

を得る．

さらに，対応 $U \mapsto T$, $V \mapsto 0$ によって準同型

$$s : \boldsymbol{\mu}_{2,A_0} = \mathrm{Spec}\, A_0[T]/(T^2 - 1) \to U_{B/A} \otimes_A A_0 = \mathrm{Spec}\, A_0[U, V]/\Big((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\Big)$$

を定義すれば，s は $\pi : U_{B/A} \otimes_A A_0 \to \boldsymbol{\mu}_{2,A_0}$ の切断であることが確かめられる．

3.2. (twisted Kummer theory) X を $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$-scheme とする．このとき，group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow U_{B/A} \xrightarrow{n} U_{B/A} \longrightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, U_{B/A}) \xrightarrow{n} H^0(X, U_{B/A}) \\ \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^1(X, U_{B/A}) \xrightarrow{n} H^1(X, U_{B/A}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る．

特に，R が $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数なら，完全列

$$0 \longrightarrow U_{B/A}(R)/n \longrightarrow H^1(R, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_nH^1(R, U_{B/A}) \longrightarrow 0$$

を得る．さらに，Rが局所環なら，$H^1(R, U_{B/A})$ は2で消える．これから，

命題 3.3. Rを局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数とする．nが奇数なら，$H^1(R, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は $U_{B/A}(R)/n$ に同型．

言い換えれば，

系 3.4. Rを局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数，SをRの不分岐n次巡回拡大とする．nが奇数なら，射 $\operatorname{Spec} R \to U_{B/A}$ が存在して図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} S \arrow[r] \arrow[d] & U_{B/A} \arrow[d, "n"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] & U_{B/A}
\end{tikzcd}$$

が cartesian となる．

以下，この可換図式を具体的に記述する．

補題 3.5. nを整数 ≥ 3 とする．このとき，$U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1)$ の上のn乗写像は

$$U \mapsto \frac{\zeta^{-1}(U+\zeta V)^n - \zeta(U+\zeta^{-1}V)^n}{\zeta^{-1} - \zeta}, \quad V \mapsto \frac{(U+\zeta V)^n - (U+\zeta^{-1}V)^n}{\zeta - \zeta^{-1}}$$

によって与えられる．

実際，対応

$$T \mapsto U + \zeta V, \ \frac{1}{T} \mapsto U + \zeta^{-1}V$$

は $B[1/n]$ の上で group scheme の同型

$$U_{B/A} \otimes_A B[\frac{1}{n}] = \operatorname{Spec} B[\frac{1}{n}][U,V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{m, B[1/n]} = \operatorname{Spec} B[\frac{1}{n}][T, \frac{1}{T}]$$

を与えるので，$\mathbb{G}_m$ におけるn乗写像の記述に帰着できる．

系 3.6. Rを局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数，SをRの不分岐n次巡回拡大とする．nが奇数なら $u, v \in R$ が存在して $u^2 + \omega uv + v^2 = 1$ でSは

$$R[U,V]/\Big(\frac{\zeta^{-1}(U+\zeta V)^n - \zeta(U+\zeta^{-1}V)^n}{\zeta^{-1} - \zeta} - u, \frac{(U+\zeta V)^n - (U+\zeta^{-1}V)^n}{\zeta - \zeta^{-1}} - v\Big)$$

に同型となる．

3.7. さらに，対応 $T \mapsto \dfrac{U+1}{V}$ によって有理写像

$$i : U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) \to \operatorname{Spec} A[T]$$

を定義すれば，iは双有理．

補題 3.8. n を整数 ≥ 3 とする．有理写像 $\psi : \operatorname{Spec} A[T] \to \operatorname{Spec} A[T]$ を

$$T \mapsto -\frac{\zeta^{-1}(T+\zeta)^n - \zeta(T+\zeta^{-1})^n}{(T+\zeta)^n - (T+\zeta^{-1})^n}$$

によって定義する．このとき，有理写像の図式

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2+\omega UV+V^2-1) & \xrightarrow{i} & \operatorname{Spec} A[T] \\ {\scriptstyle n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \operatorname{Spec} A[U,V]/(U^2+\omega UV+V^2-1) & \xrightarrow[i]{} & \operatorname{Spec} A[T] \end{array}$$

は可換．

図式の可換性は「半角の公式」を援用して確認できる．これから補題3.5あるいは系3.6と併せて以下を得る．

系 3.9. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数，S を R の不分岐 n 次巡回拡大とする．n が奇数なら，射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} A[T]$ が存在して有理写像の図式

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A[T] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A[T] \end{array}$$

が cartesian となる．

系 3.10. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数，S を R の不分岐 n 次巡回拡大とする．n が奇数なら，$c \in R$ が存在して S は

$$R[T]/\Big(\frac{\zeta^{-1}(T+\zeta)^n - \zeta(T+\zeta^{-1})^n}{\zeta^{-1}-\zeta} - c\frac{(T+\zeta)^n - (T+\zeta^{-1})^n}{\zeta-\zeta^{-1}}\Big)$$

に同型となる．

補註 3.11. 多項式

$$\frac{\zeta^{-1}(T+\zeta)^n - \zeta(T+\zeta^{-1})^n}{\zeta^{-1}-\zeta}, \ \frac{(T+\zeta)^n - (T+\zeta^{-1})^n}{\zeta^{-1}-\zeta} \in \mathbb{Z}[\omega][T]$$

は本質的には Čebyšev 多項式である．対応 $T \mapsto (U+1)/V$ を $T \mapsto -(U+1)/V$ に代えて議論を進めれば陸名 [5] によって得られた n 次巡回拡大に対する生成多項式

$$\frac{\{\zeta^{-1}(T-\zeta)^n - \zeta(T-\zeta^{-1})^n\} - Y\{(T-\zeta)^n - (T-\zeta^{-1})^n\}}{\zeta-\zeta^{-1}}$$

に至る．

また，対応 $T \mapsto -(U+1)/V$ によって定義される有理写像 $i : U_{B/A} \otimes_A A[1/n] \to \mathbb{A}^1_{A[1/n]}$ は射 $i : U_{B/A} \otimes_A A[1/n] \to \mathbb{P}^1_{A[1/n]}$ に延長できる．特に，$\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数であるような体 K に対して単射 $i : U_{B/A}(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ を得る．$U_{B/A}(K)$ の i による像は小松 [4] によって定義された Galois 加群 T_K に他ならない．[4] では Galois 加群 T_K を用いて twisted Kummer theory を定式化している．

補註 3.12. Serre[8], Ch.VI は最初に体の Galois 拡大における正規底の存在を代数群の枠組みで定式化し，そこから Kummer 理論や Artin-Schreier 理論を，さらに，Artin-Schreier-Witt 理論を導いている．そして，第 9 項の終わりに

Lorsqu'on ne suppose plus que k contienne ε, la théorie de Kummer ne s'applique plus. Toutefois, on peut encore, dans certains cas, réduire la dimension de $G(N)$. Lorsque $n = 3$ par exemple, on peut prendre pour quotient de $G(N)$ le groupe orthogonal G pour la forme quadratique $x^2 - xy + y^2$; on voit facilement que ce groupe contient un sous-groupe N cyclique d'ordre 3 formé de points rationnels sur corps premier, et que l'isogénie $G \to G/N$ vérifie la propriété universelle de la prop.7. Au point de vue de la théorie des corps, cela revient à l'énoncé suivant facile à verifier directement:

En caractéristique différente de 3, toute extension cyclique de degré 3 peut être engendré un élément g ayant pour conjuguées $1/(1-g)$ *et* $1 - 1/g$.

と述べている．この一節は torus による Kummer 理論を示唆しているとも読み取れる．

4 Twisted Kummer-Artin-Schreier theory

4.1. p を素数 > 2 とし，$\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\omega = \zeta + \zeta^{-1}$, $A = \mathbb{Z}[\omega]$, $B = \mathbb{Z}[\zeta]$ とおく．このとき，B は $A[t]/(t^2 - \omega t + 1)$ に同型なので，このとき，

$$G = G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X, Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X \mapsto & X \otimes 1 + 1 \otimes X - \omega X \otimes X - 2X \otimes Y - 2Y \otimes X - \omega Y \otimes Y, \\ Y \mapsto & Y \otimes 1 + 1 \otimes Y + (\omega^2 - 2) Y \otimes Y + \omega X \otimes Y + \omega Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる．

ここで，

$$\lambda = \zeta - \zeta^{-1}, \ \Theta(T) = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} (-1)^i T^{p-2i}$$

とおく．このとき，

$$\lambda^p = \Theta(\zeta) - \Theta(\zeta^{-1})$$

が成立する．さらに，

$$\tilde{\omega} = \mathrm{Tr}_{B/A}\Theta(\zeta) = \Theta(\zeta) + \Theta(\zeta^{-1}), \ \tilde{\eta} = \mathrm{Nr}_{B/A}\Theta(\zeta) = \Theta(\zeta)\Theta(\zeta^{-1})$$

とおく．このとき，$\theta = \Theta(\zeta)$ とおけば，$\tilde{B} = A[\theta] \subset B$ は $\theta^2 - \tilde{\omega}\theta + \tilde{\eta} = 0$ によって定義される A の二次拡大．したがって，

$$\tilde{G} = G_{\tilde{B}/A} = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + \tilde{\omega}XY + \tilde{\eta}Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X \mapsto & X \otimes 1 + 1 \otimes X - \tilde{\omega} X \otimes X - 2\tilde{\eta} X \otimes Y - 2\tilde{\eta} Y \otimes X - \tilde{\omega}\tilde{\eta} Y \otimes Y, \\ Y \mapsto & Y \otimes 1 + 1 \otimes Y + (\tilde{\omega}^2 - 2\tilde{\eta}) Y \otimes Y + \tilde{\omega} X \otimes Y + \tilde{\omega} Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる．

補註 4.1.1. $D = \omega^2 - 4$, $A_0 = A/(D)$ とおく．このとき，$G_{B/A} \otimes_A A_0$ は加法群 $\mathbb{G}_{a,A_0}$ に同型．実際，

$$G_{B/A} \otimes_A A_0 = \operatorname{Spec} A_0[X,Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y) = \operatorname{Spec} A_0[X,Y]/\left(\left(X + \frac{\omega}{2}Y\right)^2 - Y\right)$$

で対応 $X \mapsto S - \frac{\omega}{2}S^2, Y \mapsto S^2$ は同型

$$\mathbb{G}_{a,A_0} = \operatorname{Spec} A_0[S] \xrightarrow{\sim} G_{B/A} \otimes_A A_0 = \operatorname{Spec} A_0[X,Y]/\left(\left(X + \frac{\omega}{2}Y\right)^2 - Y\right)$$

を定義する．

定理 4.2. (twisted Kummer-Artin-Schreier theory) $A = \mathbb{Z}[\omega]$ の上の group scheme の準同型

$$\Psi : G = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y) \to \tilde{G} = \operatorname{Spec} A[X,Y]/(X^2 + \tilde{\omega}XY + \tilde{\eta}Y^2 - Y)$$

が対応

$$\begin{aligned} X &\mapsto \frac{1}{\lambda^{2p}} \left[-\Theta(\zeta^{-1})\{1 + \lambda(X + \zeta Y)\}^p + \tilde{\omega} - \Theta(\zeta)\{1 - \lambda(X + \zeta^{-1}Y)\}^p \right], \\ Y &\mapsto \frac{1}{\lambda^{2p}} \left[\{1 + \lambda(X + \zeta Y)\}^p - 2 + \{1 - \lambda(X + \zeta^{-1}Y)\}^p \right] \end{aligned}$$

によって定義される．さらに，Ψ は finite étale で $\operatorname{Ker}\Psi$ は constant group scheme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型．

実際，$B = \mathbb{Z}[\zeta]$ の上の group scheme の準同型

$$s : G \otimes_A B = \operatorname{Spec} B[X,Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y) \to \mathcal{G}^{(\lambda)} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{1 + \lambda T}],$$

$$\tilde{s} : \tilde{G} \otimes_A B = \operatorname{Spec} B[X,Y]/(X^2 + \tilde{\omega}XY + \tilde{\eta}Y^2 - Y) \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{1 + \lambda^p T}]$$

をそれぞれ

$$T \mapsto X + \zeta Y,\ \frac{1}{1+\lambda T} \mapsto 1 - \lambda(X + \zeta^{-1}Y)$$

あるいは

$$T \mapsto X + \Theta(\zeta)Y,\ \frac{1}{1+\lambda^p T} \mapsto 1 - \lambda^p\{X + \Theta(\zeta^{-1})Y\}$$

によって定義すれば，s, $\tilde{s}$ は同型で，B の上の group scheme の図式

$$\begin{array}{ccc} G \otimes_A B & \xrightarrow{\Psi} & \tilde{G} \otimes_A B \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{s}} \\ \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \end{array}$$

は可換．したがって，Kummer-Artin-Schreier 理論から結論を得る．

twisted Kummer theory の場合と同様の議論によって，例えば以下の結論を得る．

命題 4.3. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega]$ 代数とする．このとき，$H^1(R, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ は $\mathrm{Coker}[\Psi : G(R) \to \tilde{G}(R)]$ に同型．

系 4.4. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega]$ 代数，S を R の不分岐 p 次巡回拡大とする．このとき，射 $\mathrm{Spec}\, R \to \tilde{G}$ が存在して図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, S & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathrm{Spec}\, R & \longrightarrow & \tilde{G} \end{array}$$

が cartesian となる．

例 4.5. $p = 3$ とする．このとき，

$$\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \omega = -1$$

したがって，

$$G = G_{B/A} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 - XY + Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X \mapsto & X \otimes 1 + 1 \otimes X + X \otimes X - 2X \otimes Y - 2Y \otimes X + Y \otimes Y, \\ Y \mapsto & Y \otimes 1 + 1 \otimes Y - Y \otimes Y - X \otimes Y - Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる．また，

$$\theta = \frac{5+3\sqrt{-3}}{2},\ \tilde{\omega} = 5,\ \tilde{\eta} = 13$$

なので,

$$\tilde{G} = G_{\tilde{B}/A} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 + 5XY + 13Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X \mapsto & X \otimes 1 + 1 \otimes X - 5X \otimes X - 26X \otimes Y - 26Y \otimes X - 65Y \otimes Y, \\ Y \mapsto & Y \otimes 1 + 1 \otimes Y - Y \otimes Y + 5X \otimes Y + 5Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる. さらに, 準同型

$$\Psi : G = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 - XY + Y^2 - Y) \to \tilde{G} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2 + 5XY + 13Y^2 - Y)$$

は対応

$$X \mapsto -X - 2Y + 4XY + 3Y^2 - 3XY^2 - Y^3, \ Y \mapsto Y - 2Y^2 + Y^3$$

によって与えられる.

参考文献.

[1] P. Furtwängler – Über die Reziprozitätsgesetze der ℓ-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn ℓ eine ungerade Primzahl bedeutet. Math. Ann. 58 (1904) 1–50

[2] P. Furtwängler – Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines bebliegen Zahlkörpers. Math. Ann. 63 (1907) 1–37

[3] A. Grothendieck – Le groupe de Brauer. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam (1968) 46–188

[4] T. Komatsu – Arithmetic of Rikuna's generic cyclic polynomial and generalization of Kummer theory. Manuscripta Math 114 (2004) 265–279

[5] Y. Rikuna – On simple families of cyclic polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002) 2215–2218

[6] T. Sekiguchi, N. Suwa – Théorie de Kummer-Artin-Schreier et applications. J. Théorie des Nombres de Bordeaux 7 (1995) 177–189

[7] T. Sekiguchi, F. Oort, N. Suwa – On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 (1989) 345–375

[8] J. P. Serre – Groupes algébriques et corps de classes. Hermann (1959)

[9] N. Suwa – Twisted Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories. Preprint

[10] W. C. Waterhouse – A unified Kummer-Artin-Schreier sequence. Math. Ann. 277 (1987) 447–451

[11] W. C. Waterhouse, B. Weisfeiler – One-dimensional affine group schemes. J. Algebra 66 (1980) 550–568